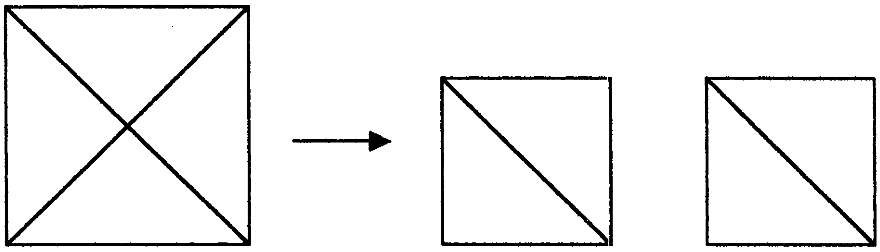
正方形４分割パズル
—特定種類の解答の他に，正解が無いことの証明—

木　下　眞　二（北海道浅井学園大学人間福祉学部・北方圏生活福祉研究所）

抄　録

「正方形４分割パズル」は，下の図に示すように，「１つの正方形を４つに切断し，それらの各２つから，２つの正方形を合成せよ」，というものである。このパズルには，いくつかの種類の解答があるが，この論文では，それら以外には，正解が無いことを証明する。

「正方形４分割パズル」
木下眞二，逢沢明によって，提出された，次の数学パズルの問題である（人間福祉研究2001 No.4，93-97）。
問題：
一つの正方形があります。それを４つの断片に切ります。その中の２つの断片を合わせて，一つの正方形を，残りの２つの断片を合わせて，もう一つの正方形を作りなさい。



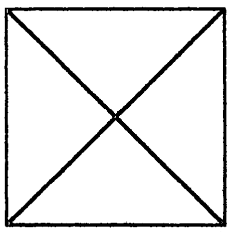
これは，一つの例です。小さいほうの二つの正方形は，同じ大きさでなくてもよろしいです。
断片は，裏返しにして，使わないこと。初めの正方形を回転して，切り口の形が同じになるもの，または，左右対称となるものは，同じ種類とします。

キーワード：三平方の定理，正方形４分割，数学パズル

この研究は，平成13年度・北方圏生活福祉研究所・特別研究費の助成によって行われた。

初めの大きな正方形を，正方形Ｇとする。これを４つのブロックに切断し，その中の２つのブロックで，正方形Ａ，残りの２つのブロックから，正方形Ｂを合成することにする。正方形Ａは，正方形Ｂと同じ大きさ，または，正方形Ｂより大きいものとする。移動した後，正方形Ａの状態にある２つのブロックを，ブロックａ，ブロックａ’　とし，それらを移動する前に，正方形Ｇの中にある状態のものを，それぞれ，ブロックＡ，ブロックＡ’と表す。正方形Ｂについても，同様に，ブロックｂ，ブロックｂ’　；ブロックＢ，ブロックＢ’と表す。

Ｉ．正方形Ｇの角を切る場合



後述の原則２により，正方形Ｇの角を切って入った切り線は，隣の角を越えることはできない。従って，ブロックの数が４つになるためには，正方形Ｇの１つの角に入った切り線が，隣の角に終わり，その切り線は，さら

に次の角に終わらざるを得ない。角を切る方法は，すべて，切り線は，角から始まり隣の角に終わることになる。後述の原則１により，正方形Ａ，Ｂの，それぞれ，少なくとも，１つのブロックには，２辺と挟直角，または，２直角と侠辺のいずれかを含まなければいけない。この場合は，いずれのブロックも２直角と侠辺を含むことは出来ない。従って，４つのブロック総てが，２辺と侠直角だけよりなるものに，ならざるを得ない。故に，正方形Ｇの角を切る場合は，上の図に示した，正方形４分割の方法しかない。

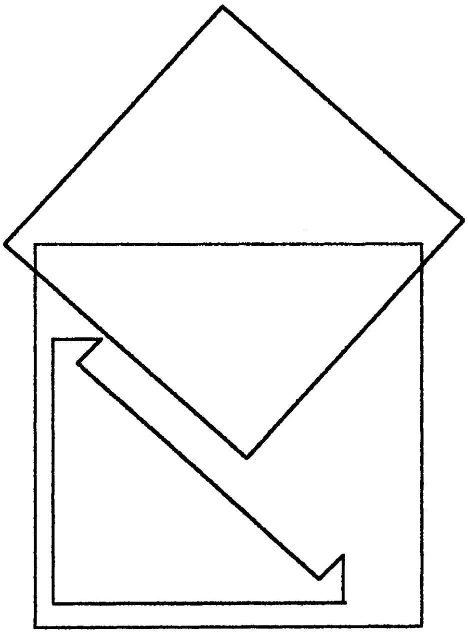
原則１：合成できる２つのブロックのいずれか１つには，２直角がはさむ１辺（２直角と１侠辺），または，二辺がはさむ直角（２辺と１侠直角）を含んでいなければならない。

［証明］

原則５の図より，明らかである。

原則２：　正方形Ｇのブロックは，辺を越えて含むことは出来ない。

［証明］



正方形Ｇの一辺を含む正方形は，正方形Ｇの面積の半分を越えることは明らかである。故に，もう１つの正方形Ｂは，正方形Ｇの面積の半分より小さい。従って，正方形Ｂを合成するブロックは，１つのブロックの中に，正方形Ｇの一辺を含んではならない。また，正方形Ｇの対辺（一部または全部）を含んではならない。

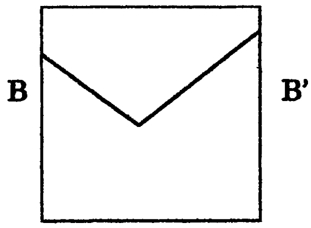
以上の条件を満たし，正方形Ｇの中の（移動する前の）ブロックＡ，Ａ’を除いた部分を，２つに切って，正方形Ｂを作ることは，以下に述べるように，いずれの場合も不可能である。

ここでは，上図のように，正方形Ｇの上辺が，ブロックＡに含まれるものとする。ブロックＡ’は，上図のように，正方形Ａの２辺と侠直角を含むことは明らかである。

原則２の証明の前に，次の原則３について証明しておく。

原則３：正方形Ｇの隣り合う２角を含む，（下図のような）Ｍ字型のブロックを２分して，１つの正方形を作ることは出来ない。Ｍ字型の中央にある２つの直線は直交するものとする。

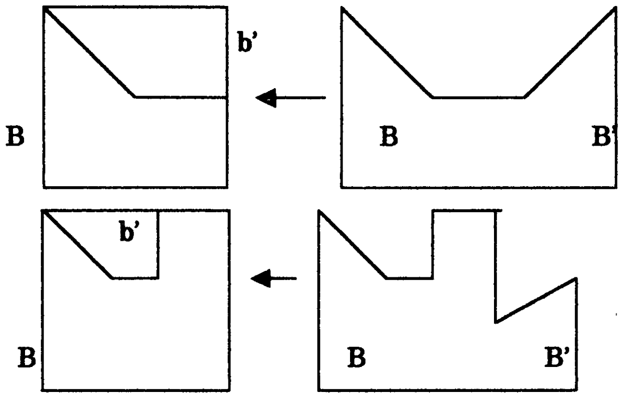
［証明］

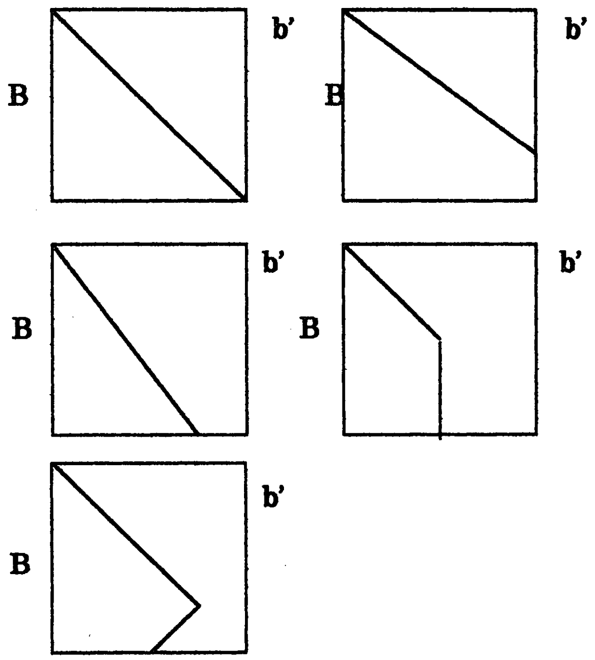


もし，Ｍ字型の図形を２つのブロック（ＢとＢ’）に切断して，正方形（正方形Ｂとする。）を合成することが出来るなら，２つのブロックのいずれかは，正方形Ｇの１つの角（ここでは，左下の角とする。）を占めることは，後述の原則５より，明らかである。これを，ブロックＢとする。

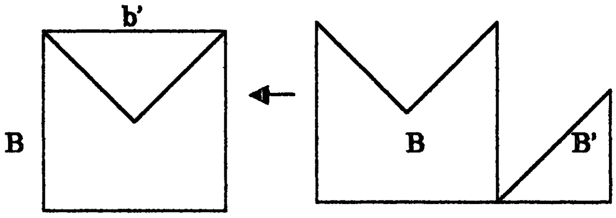
ブロックＢを固定し，右下角を占めるブロック（ブロックＢ’とする。）を，移動することにする。

１’（鋭角を含む）ブロッＢ’の右辺を，（同様に鋭角を含むブロックＢを持つ）正方形Ｂの辺に，移動する場合は，次に示すように，いずれも，不可能であることは，明らかである。





2'（鋭角を含む）ブロックB'の右辺を，（同様に鋭角を含むブロックBを持つ）正方形Bの内部に，移動する場合も，不可能であることは，明らかである。



従って，M字型の図形は勿論，その内部に空白部を含む図形も，２分して，正方形Bを合成することは，まったく出来ないことは，明らかである。

原則２の証明に戻って，以下に，述べる。

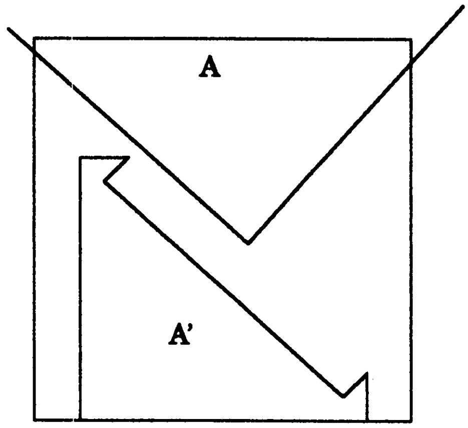
１）（原則２の下に示す図のように）ブロックA'が，正方形Gのいずれの辺にも，また，ブロックAにも，接することがない場合。

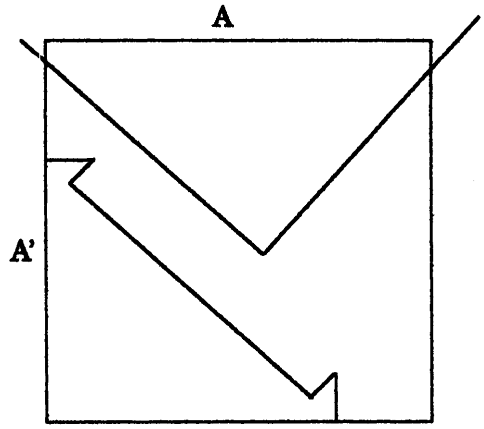
前述の原則３より，残りの部分を２つに切断して，正方形Bを合成することが出来ないのは，明らかである。

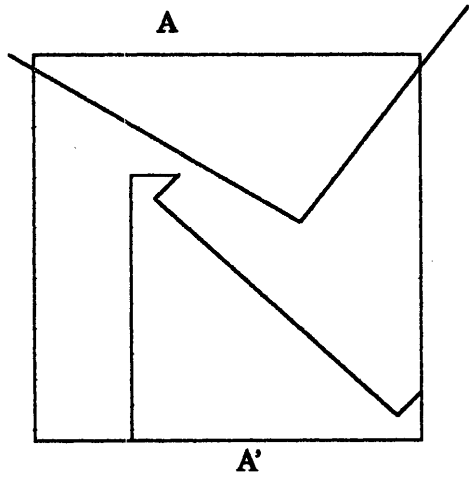
２）正方形A'が，正方形Aと，１点でのみ接し，正方形Gの辺とは，１）と同様に，いずれも接しない場合。

この場合も，正方形Bを合成できないことは，１）と同様に，明らかである。

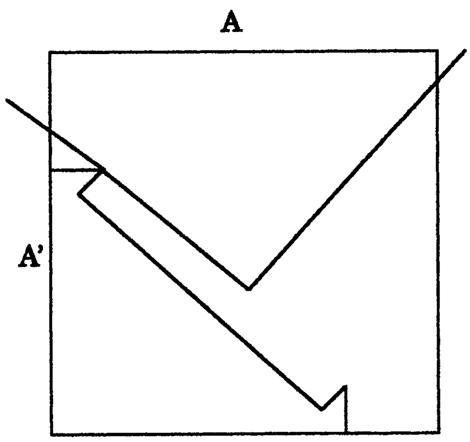
３）ブロックA'が，正方形Gの下辺に，（１点で，または，下図に示すように，密着して）接する場合。



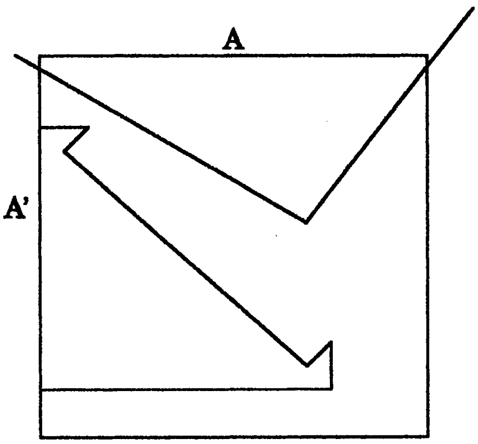




同様に，いずれの場合も，正方形Bを合成することが出来ないのは，明らかである。これらの場合，（次の図に示すように）ブロックAとA'が，さらに，点で接しても，同様である。



４）ブロックＡ'が，正方形Ｇの左右の辺の１つにのみ，１点で，または，下図に示すように，密着して，接する場合。

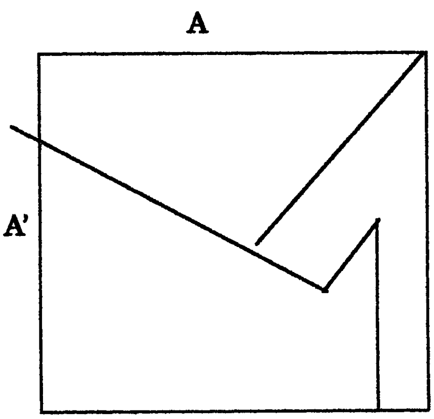


点で接する場合は，１）と同様に明らかである。また，上図のように，直線で密着する場合は，前述のように，正方形Ｂの辺は，正方形Ａの辺より短いので，ブロックＡ'の下部で，ブロックを切ることになる。このブロックからは，正方形Ｂを合成できないことは，明らかである。

これらの場合，ブロックＡとＡ'が，さらに，点で接しても，同様である。

以上の１）２）３）４）の場合を除くと，正方形Ａと正方形Ａ'は，直線で密着する場合以外には無いこととなる。この場合は，下図に示すように。正方形Ｇの上辺の１角のみが，正方形Ａの辺よって，角を切られることになる。

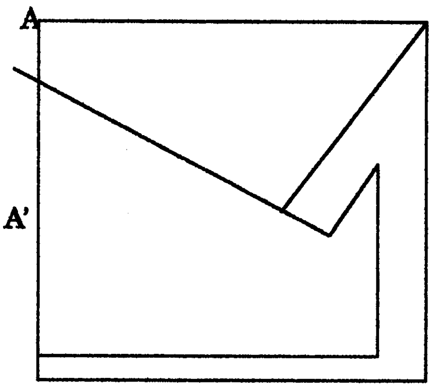
５）下図に示すように，正方形Ａ'が，正方形Ａに直線で密着し，かつ，正方形Ａ'の（正方形Ａの辺の全長となる）２辺が，正方形Ｇの隣り合う２辺に密着する場合。

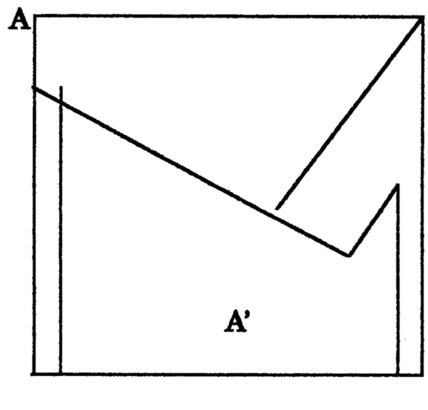


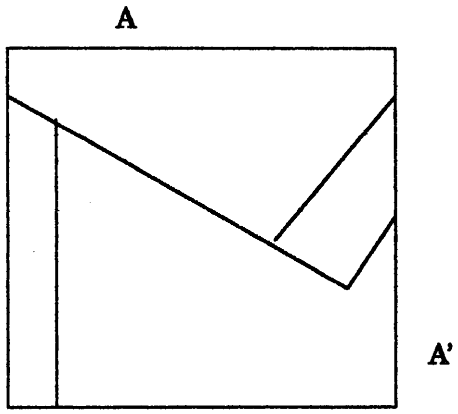
この場合は,上図で右辺に接するブロックを，上下に２分しなければならない。
このブロックの凹部の俠角をなしている部分を含んで分割すると,上方の鋭角を含む部分を，この俠角に移動しなければならない。しかし，これでは,正方形Ｂが出来ないことは,明らかである。

また,俠角を切って,分割すると,隣り合う２直角を持つブロックが２つ出来るが,これらも，正方形Ｂを合成できないことは明らかである。

６）ブロックＡとＡ'が密着する，その他の場合。







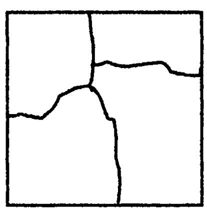
上の第１図のように，正方形Ｇとの下辺との間に隙間がある場合は，４）の場合と同様に，また，上第２，３図でも，正方形Ｂが合成できないことは，明らかである。

以上の１）２）３）４）５）６）のことにより，正方形Ｇの１辺を越えて，ブロックを切ったときは,総ての場合で,正方形Ｂを合成できないことが示された。

よって,正方形の角を切った場合の,「正方形４分割パズル」の解答は,初めの問題に図示したように，直交する２直線が，４つの角を切る方法しかないことが,証明された。

ここからは,正方形Ｇの角を切らない場合についてだけ,論じる。

原則４：正方形Ｇの角を切らない場合，４つのブロックの切り線は,総て,１つの辺から始まり,隣の辺に終わる。



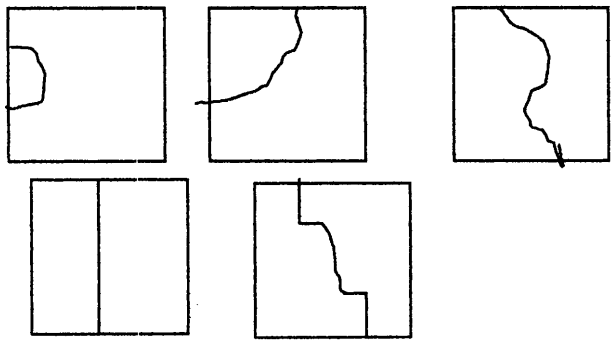
［証明］

原則２より，明らかである。もし,そうでなければ,ブロックの切り線が，正方形Ｇの辺を越すものがあることになるからである。

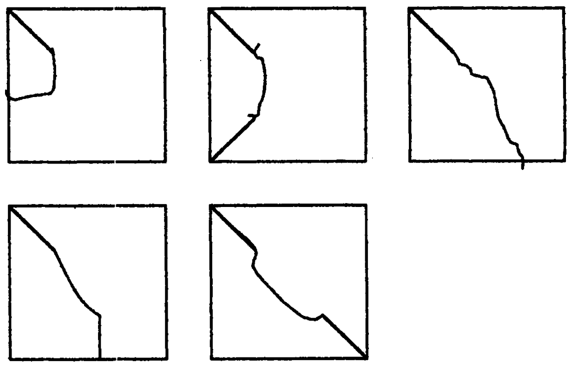
原則５：原則６に示す，１つの場合を除き，正方形Ｇの４つの角のうち，少なくとも１つは，正方形Ａの角，少なくとも１つは，Ｂの角となる。

［証明］

１．角を切らない切断



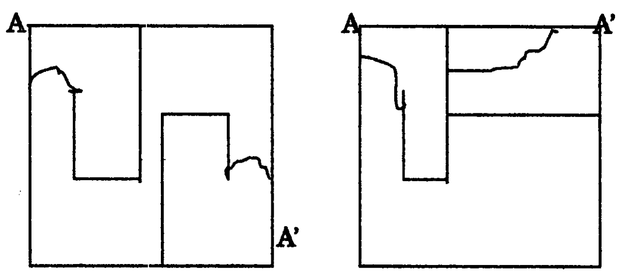
２．角を切る切断



正方形Ａ，Ｂを合成する２つのブロックのうち，上の１．の最後の図に示す場合を除いて，少なくとも，１つのブロックの角は，正方形Ｇの角を占めることは。明らかである。

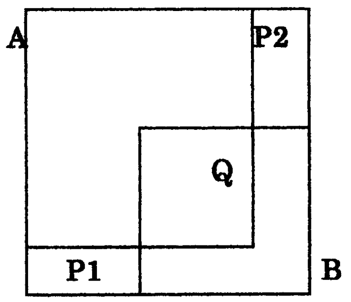
原則６：正方形ＡまたはＢが，ともに２直角と１侠辺を持つブロックよりなる場合で，移動して，合成した場合の，切り線が入り口，出口で，いずれも，辺と直角をなし，入り口，出口の線の延長した２つの異なる平行線の内部にのみ，切り線がある場合は，この辺にある切り口の角が正方形Ｇの対角を占めることがある。従って，いずれのブロックも正方形Ｇの角を占めないことがある。

［証明］



原則５の，１．の下右図のような場合のみ，上の左図のように，正方形ＡまたはＢの角が，いずれも，正方形Ｇの角を占めないことがある。この場合，２つのブロックは，正方形Ｇの対角を占める。上の右図のように，隣の角を占めることは出来ないことは，明らかである。

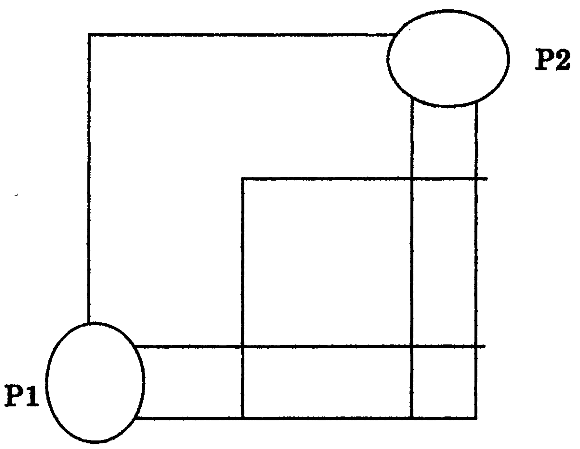
Ⅱ．正方形Ｇの対角を正方形ＡとＢのブロックの各１つが占める場合（「正方形Ａ，Ｂ対角」の場合）



原則５で示したように，正方形Ｇの角の１つを，正方形Ａの１つのブロック（ブロックＡとする。）として，固定したままにし，もう１つのブロックＡ'を移動して上図のように正方形Ａを合成する。（移動したブロックＡ'は，ブロックａ' と呼ぶことにする。）同様に，対角のブロックＢを移動せず，ブロックＢ'を（ブロックｂ' として）移動して正方形Ｂを合成する。正方形ＡとＢが重なった部分は正方形（Ｑとする）となる。正方形ＡとＢとに含まれない２つの合同の長方形（Ｐ1とＰ2とする）は，それらの面積を合わしたものが，正方形Ｑと等しいことは明らかである。（上図で，Ｐ1は左下部，Ｐ2は右上部とする。）

原則７：長方形Ｐ1とＰ2は，ブロックＡ'またはＢ'に含まれていなければならない。Ｐ1とＰ2は，分割して移動できない。従って，１つのブロックに，Ｐ1とＰ2の両方の部分（一部または全部）を含むことは出来ない。

［証明］



上図の楕円で囲んだＰ1とＰ2の部分は，互いの距離が正方形Ａの対角線の長さを越える部分（小さい正方形となる。）とする。従って，これらの部分は，１つのブロックに含まれて移動することは出来ない。つまり，左下部のブロックには，必ず，Ｐ1のこの部分を含む。故に，長方形Ｐ１と，最も近い距離にある長方形Ｐ２の部分（Ｐ2の左下部）と，このブロックの部分の最長距離は，正方形Ｂの対角線の長さを超えることは，明らかである。このことは，このブロックに，長方形Ｐ2の一部が含まれるとすると，そのブロック内の最長の直線距離は，正方形Ｂの対角線の長さを超えることを意味する。このブロックを，ブロックＡ'として，上図の正方形Ａの内部に移動すると，この最長距離を示す部分は，正方形Ｑの中に入りきらない。後述の原則10により，この移動したものと，同じ位置の部分は，（少なくとも，Ｐ2の最上部を含む）ブロックＢ'の部分として，上図の正方形Ｂの内部に移動しなければならない。正方形Ｂの対角線の長さを越える部分が入っているブロックを，正方形Ｂの内部に移動できないことは，明らかである。

以上のことより，Ｐ1を含むブロックには，Ｐ2の一部を含むことは出来ない。同様に，従って，Ｐ２を含むブロックには，Ｐ１の一部を含むことは出来ない。従って，１つのブロック（ブロックＰ１）には，Ｐ1の総ての部分を，もう１つのブロック（ブロックＰ２）には，Ｐ2の総ての部分を含む。

以下では，ブロックＰ1を先ず移動し，次に，ブロックＰ2を移動して，上図のように，正方形Ｇの内部に，正方形Ａと正方形Ｂが，対角を占めるようにする。以下では，ブロックＰ1を移動した時点で，ブロックＰ2をまだ移動しない状態で考える。

原則８：「正方形Ａ，Ｂ対角」の場合，長方形Ｐの長辺と正方形Ｑの辺が同じ長さの場合は，正方形Ｇ，正方形Ａ，正方形Ｂの辺の長さの比は，５：４：３ となる。

［証明］

前述のように，長方形Ｐ１と（同じ形の）長方形Ｐ2の合わせた面積は，正方形Ｑの面積と等しい。従って，長方形Ｐの短辺の長さを１とすると，長辺の長さは２となる。故に，上図から容易に分かるように，各正方形の辺の長さは，正方形Ｇは５，正方形Ａは４，正方形Ｂは３，となる。

原則９：ブロックＰ1が（ブロックＡ'またはＢ'として移動して）正方形Ｑの範囲の中で，重ならない部分（以下では，正方形Ｑ内「マイナス部分」と呼ぶ）は，その部分の外部にある，ブロックＰ2の中に，同じ形状の部分が含まれていて，それを移動して来なければならない。

［証明］

上の図のように，正方形Gの中に，移動した正方形Aと正方形Bを合成した状態では，正方形Qの内部では，２つのブロックに属する部分が重なってあり，その外部では，１つのブロックに属する部分だけよりなる。従って，ブロックＰ1の移動で，正方形Ｑの内部で重ならない部分は，正方形Ｑの外部に，ブロックＰ2の部分として含まれている，それと同じ形状のものを，移動して来なければならないことは，明らかである。

原則10：ブロックＰ1の移動で，正方形Ｑの範囲外で，重なった部分は，同じ形状の部分（正方形Ｑ外「プラス部分」）がブロックＰ2の中に含まれていて，それを除去，移動して行かなければならない。
［証明］
上の説明のように，正方形Ｇの中に，移動した，正方形Ａと正方形Ｂを合成した状態では，正方形Ｑの外部では，１つのブロックに属する部分だけよりなる。従って，ブロックＰ1の移動で，正方形Ｑの外部で重なった部分は，ブロックＰ2の部分として，除去されなければならないことは，明らかである。

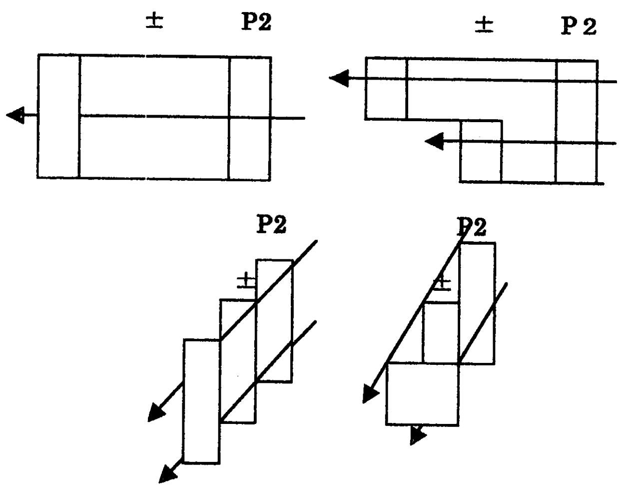
原則11：ブロックＰ1の移動で，正方形Ｑの範囲外で，除去された部分は，同じ形状の部分（正方形Ｑ外「マイナス部分」）がブロックＰ2の中に含まれていて，それを移動して来なければならない。
［証明］
上の説明からして，明らかである。

原則12：ブロックＰ1の移動後における上記（つまり，正方形Ｑ内「マイナス部分」，正方形Ｑ外「プラス部分」，正方形Ｑ外「マイナス部分」）以外の部分が，ブロックＰ2の一部分（「マイナスプラス部分」）となる場合は，ブロックＰ２の移動で，除去されても，ブロックＰ2の，他の，または，同じ部分によって，覆われなければならない。
［証明］
上述の説明より，明らかである。

原則13：ブロックＰ２が「マイナスプラス部分」を含む場合，その移動方法は，平行移動と，回転移動とにより，対称移動にはよらない。
［証明］
ブロックを裏返しにして使用しないという，初めの約束による。

原則14：ブロックＰ2が「マイナスプラス部分」を含んで移動した場合，長方形Ｐ2と同じ面積を持った部分が，移動したブロックＰ2の，その他の所に，現れる。（ここでは，長方形Ｐ2の「間接移動」と呼ぶ。）
［証明］
上述のことより，明らかである。

原則15：長方形Ｐ2の「間接移動」が，平行移動による場合は，その形状は変化しない場合と，変化する場合がある。いずれの場合も，平行移動による「間接移動」では，総ての平行移動の平行線上で，長方形Ｐ2を横切る長さと，「間接移動」された部分を横切る長さは，等しい。
［証明］
左側の図のように，Ｐ2部分と±部分を，左に（上図）または，左下に（下図），Ｐ２の横幅の分だけ，平行移動して，±部分の左側に，まったく，形状の変化しない「間接移動」を生ずる場合と，右側の図のように，形状が変化する「間接移動」を生ずる場合がある。



原則16：長方形Ｐ2の，「間接移動」のための，平行移動は，「押し方法」と「跳び方法」の２つがある。
［証明］
原則15の上図のように，長方形Ｐ２の辺の方向に平行移動する方法を，「押し方法」，その他の方向に平行移動する方法を，「跳び方法」と呼ぶことにする。

原則17：長方形Ｐ2の，平行移動による「間接移動」によって，移動した（単数または複数の）図形は，いずれの方法によっても，長方形Ｐ2に接する２本の平行線に，同様に接し，かつ，その外部に出ることはない。
［証明］
原則15の図から，容易に理解することが出来る。

原則18：長方形Ｐ２の「跳び方法」による平行移動では，「マイナスプラス部分」が隣接する場合，（長方形Ｐに対して）（縦方向の分も，加わるが，）横方向には，長

方形Ｐの横幅の分，または，その整数倍の長さの分だけ，「跳ぶ」。「マイナスプラス」部分と，長方形Ｐ2の間に，それ以外の「プラス」部分の，Ｐ2と同じ長さの長方形が，Ｐ2に隣接して加わる場合，平行移動の距離は，「押し方法」では，長方形Ｐ2の横幅の非整数倍の「押し」が可能であるが，「跳び方法」では，長方形Ｐ2と隣接する長方形の合わせた横幅の分，または，その整数倍の長さの「跳び」しか可能でない

［証明］

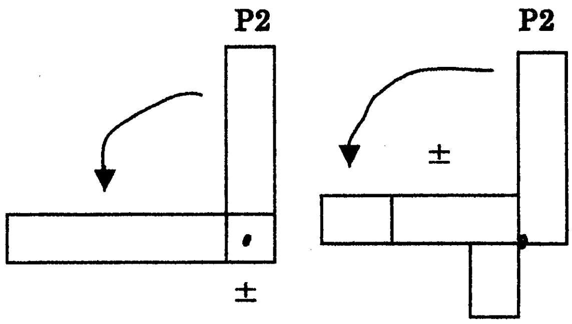
原則16の図から，明らかである。

原則19：長方形Ｐ2の「間接移動」が，回転移動による場合は，「跳び方法」のみであり，その形状が，まったく変化しない場合（この場合は，結果的に，直接移動と同じこととなる。）と，２つに分かれることがある。分かれたものを合わせると，長方形Ｐ2と，まったく同じ形となる。２つに分かれる方向（回転の角度）は，90度と180度となる。場合によっては120度と240度の可能性もある。

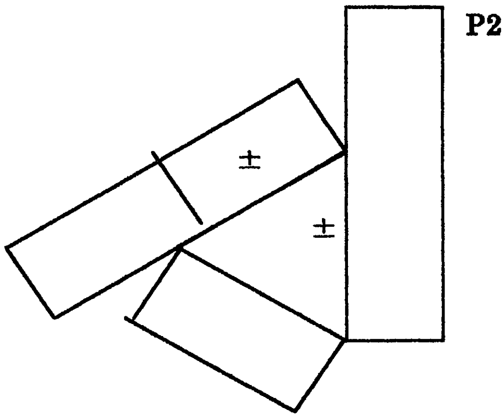
［証明］

「押し方法」による回転移動では，扇型の一片とならなければならないので，長方形Ｐ2の形状では，「押し方法」が不能であることは，明らかである。また，２つに分かれる場合の方向（回転の角度）は，90度と180度（場合によっては，120度と240度も可能）となることも，明らかである。

左図では，回転の中心は，±部分小正方形の中心である。右図では，±部分長方形の右下角で，長方形Ｐ2は，「間接移動」の結果，90度の方向に移動した部分と，180度の方向に移動した部分の２つに分かれている。



下図では，正三角形の部分と，それに隣接する長方形の部分が，「プラスマイナス部分」で，正三角形の中心回転の中心である。長方形Ｐ2は，「間接移動」の結果，120度の方向に移動した部分と，240度の方向に移動した部分の２つに分かれている。



原則20：ブロックＰ１の移動で生じた，（正方形Ｑ外にある）「プラス部分」は，平行移動で，長方形Ｐ2を「間接移動」する場合，それと同じ方向にある，「マイナス部分」へ，「間接移動」されなければいけない。「跳び方法」による場合は，その移動の横方向の距離は，長方形Ｐの横幅の長さ，または，その倍数の長さとなる。同様に，ブロックＰ１の移動で生じた，（正方形Ｑ外にある）「マイナス部分」は，反対の方向にある，「プラス部分」から，「間接移動」されなければいけない。平行移動による「間接移動」では，総ての平行移動の平行線上で，（長方形Ｐ2の上も，「プラス部分」として，）「プラス部分」の長さと，「マイナス部分」の長さの，総和はゼロとなる。

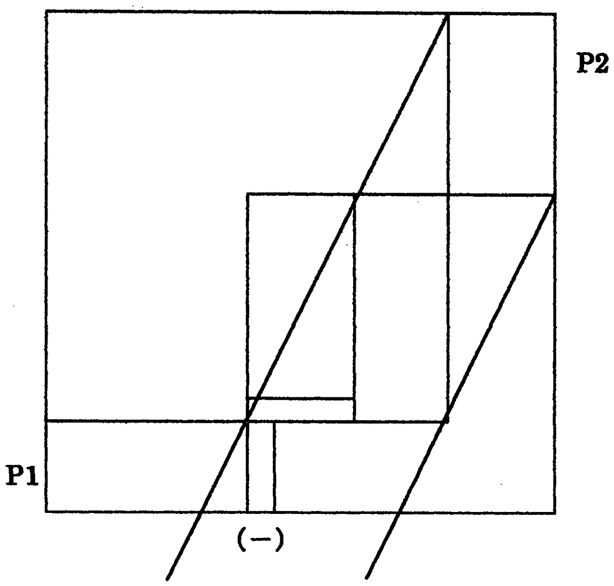
［証明］

原則15の図から，容易に理解することが出来る。

原則21：「正方形Ａ，Ｂ対角」の場合，長方形Ｐの長辺が，正方形Ｑの辺より短い場合は，（ブロックＰ1として，）長方形Ｐ１だけを移動することは出来ない。

［証明］

次の図に示すように，このような短い長方形Ｐ１だけの移動では，正方形Ｑの２角を埋めることが出来なく，３角または４角が残る。原則９により，正方形Ｑ内「マイナス部分」は，正方形Ｑの外部に，そのままの形状で，ブロックＰ２の一部として，含まなければならないが，この場合，外部の部分における幅の長さは，いずれも，長方形Ｐの長辺を越すことはなく，それより長い辺と3角（または４角）を含む部分を，含むことが出来ないことは明らかである。



原則22：「正方形A，B対角」の場合，長方形Pの長辺が，正方形Qの辺より短いことはない。

［証明］

原則21より，ブロックP1の移動で，正方形Qの2角以上を埋めるためには，ブロックP1が長方形P1以外の部分を含んでいなければならない。

1）ブロックP1が長方形P1の右側（正方形Bの領域）を含むことによって，正方形Qの2角を埋める場合：

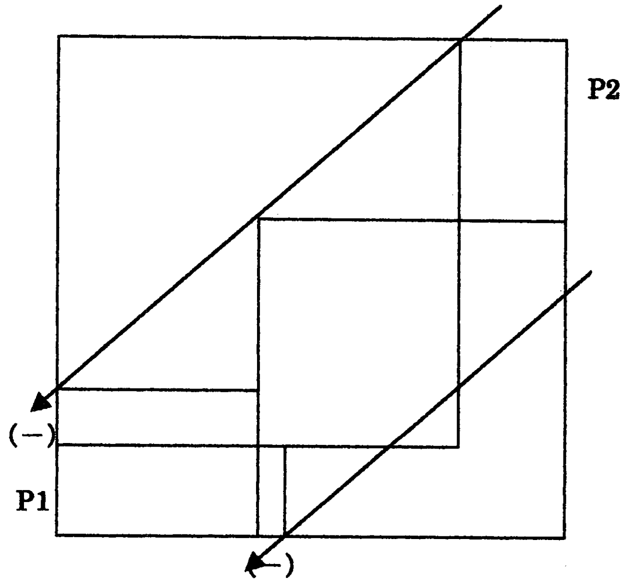
原則21の図のように，正方形Qの左側の2角を埋める場合は，正方形Q内と外の，2つの「マイナス部分」は，長方形P2と，共通な2本の平行な接線を引くことは出来なく，原則17，により，長方形P2を，平行移動で，「間接移動」することは出来ない。原則19により，回転移動による「間接移動」でも，また，「直接移動」でも，移動することが出来ないことは明らかである。同様に，正方形Qの，右2角を埋める場合，上2角を埋める場合，下2角を埋める場合も，「直接移動」も「間接移動」も出来ないことは，明らかである。

2）ブロックP1が長方形P1の上側（正方形Aの領域）を含むことによって，正方形Qの2角を埋める場合：

1）の場合と同様に，いずれの場合も，長方形P2の「直接移動」も「間接移動」も出来ないことは，明らかである。

3）ブロックP1が長方形P1の右側（正方形Bの領域）と，上側（正方形Aの領域）の両方を含むことによって，正方形Qの2角，または，3角を埋める場合：

1）と2）から，ブロックP1が長方形P1の右側（正方形Bの領域）と上側（正方形Aの領域）の両方を含むことによって，正方形Qの2角，または，3角を埋める場合を，次に，考えねばならない。なお，正方形Qの4角総てを埋めることが出来ないことは，明らかである。



上の図に示すように，このようなブロックP1の移動によって生じた，2つの「マイナス部分」と，長方形P2との，両方に共通に接する，2本の平行線が無いことは明らかである。原則19により，回転移動による「間接移動」でも，また，「直接移動」でも，移動することが出来ないことも，明らかである。

従って，3）のいずれの場合も，長方形P2の「直接移動」も「間接移動」も出来ないことは，明らかである。

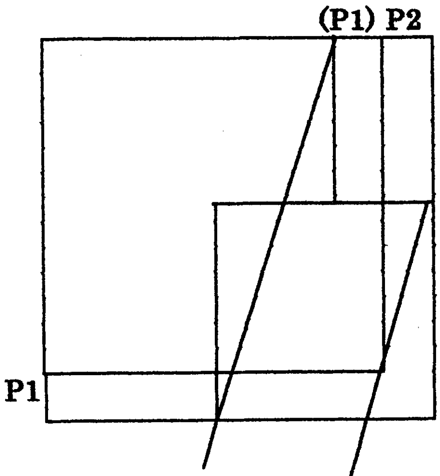
以上の1）2）3）と，原則21によって，長方形Pの長辺が，正方形Qの辺より短いことはないことが，証明された。

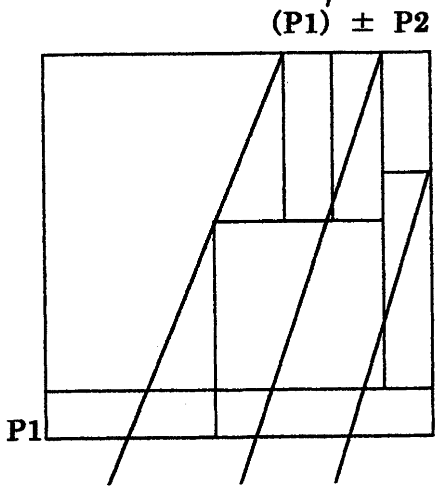
原則23：「正方形A，B対角」の場合，長方形Pの長辺が，正方形Qの辺より長いことはない。

1）ブロックP1を正方形Qの外部に移動する場合：

次の上図に示すように，長方形P1だけを，長方形P2に，並べて，隣接して，移動する場合は，原則18，19，により，これらを，正方形Qへ，「間接移動」することは出来ない。また，「直接移動」出来ないことも明らかである。次の下図に示すように，正方形Qを内包する平行線に，内包するように，長方形P1を移動する場合は，間入している「プラスマイナス部分」と共に，長方形（P1），P2を，ブロックP2として，移動しなければならない。

これは，その「±部分」が，結果として，「マイナス部分」になるので，不可能である。

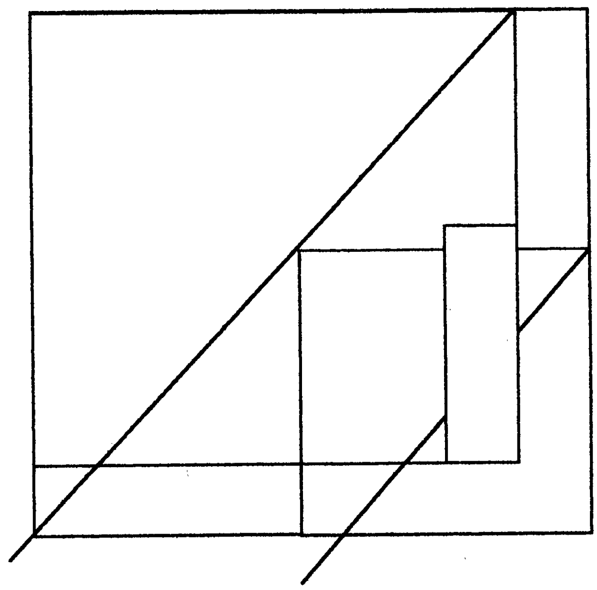




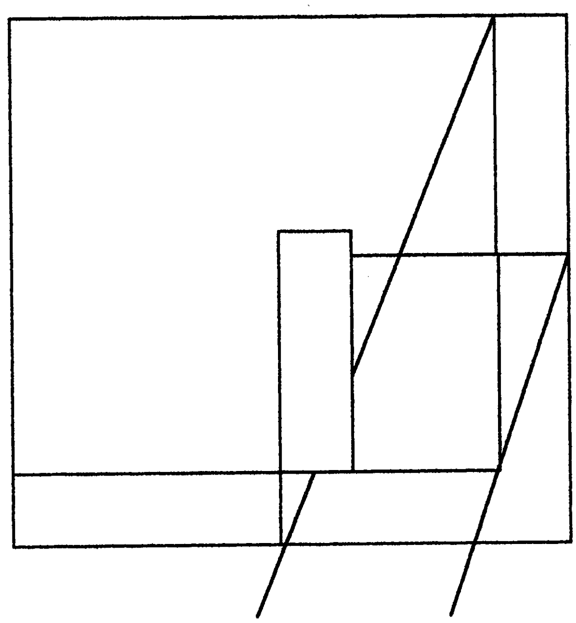
同様に，正方形Ｑ外の，その他の部分に，長方形Ｐ1を移動することも，不可能であることは，明らかである。また，ブロックＰ1が，長方形Ｐ1以外の部分を含む場合も，不可能であることは，明らかである。何故なら，その部分は，移動後，「マイナス部分」となって，残るからである。

２）ブロックＰ1を正方形Ｑの内部に移動する場合：

長方形Ｐ1は，正方形Ｑの辺より長いので，ブロックＰ1の全部を，正方形Ｑの内部に入れることは出来ない。次の図に示すように，長方形Ｐ1だけを，正方形Ｑの内部に移動する場合は，原則17により，また，原則19により，長方形Ｐ２の「間接移動」を，正方形Ｑ内の「マイナス部分」に，行うことは出来ない。また，「直接移動」することが，出来ないことも明らかである。次の図に示すように，長方形Ｐ2を内包する２本の平行線が，正方形Ｑの左上角を内包しても，反対側の部分は，長方形Ｐ1の移動によっては，内包することは出来ない。



また，下図に示すように，長方形Ｐ2を内包する２本の平行線が，正方形Ｑの右下角を内包しても，反対側の部分は，長方形Ｐ1の移動によっては，内包することは出来ない。



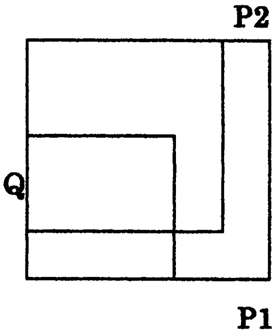
また，ブロックＰ1が，長方形Ｐ1以外の部分を含むことによって，正方形Ｑ内の内包されなかった部分を埋めても，不可能であることは，明らかである。何故なら，その部分は，ブロックＰ1の移動後，「マイナス部分」となって残る。原則20により，その部分は，ブロックＰ2の平行移動と，反対の方向にある「プラス部分」から，「間接移動」されなければいけない。この場合，そのような「プラス部分」はなく，「間接移動」は，不可能であることは，明らかであるからである。

以上の１）２）によって，長方形Ｐの長辺が，正方形

Ｑの辺より長いことはないことが，証明された。

以上の，原則８，22，23，により，正方形Ｇの対角を，正方形ＡとＢのブロックの各１つが，占める場合（「正方形Ａ，Ｂ対角」の場合）は，「正方形４分割パズル」の解答は，長方形Ｐの長辺が，正方形Ｑの辺と同じ長さの場合にだけ，つまり，正方形Ｇ，正方形Ａ，正方形Ｂの，辺の比が，５：４：３　の場合にだけ，成立することが証明された。

Ⅲ．正方形Ｇの隣の角を正方形ＡとＢのブロックの各１つが占める場合（「正方形Ａ，Ｂ隣角」の場合）

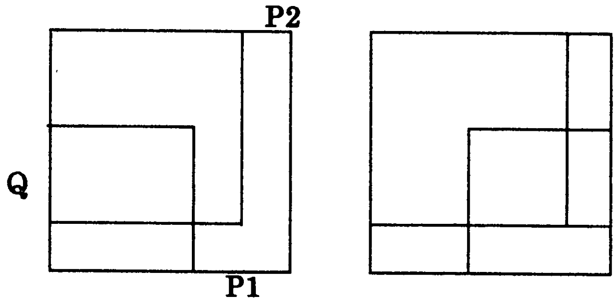


ブロックＡ'とブロックＢ'とを移動して，上図のように，正方形Ｇの内部に，隣り合う，正方形Ａと正方形Ｂとを合成できる場合である。両正方形の重なる部分（長方形Ｑと呼ぶ）と，いずれの正方形も範囲外である部分（Ｐ1とＰ2と呼ぶ。）とが，同じ面積であることは，明らかである。上図で，右および右下を占める，いずれの正方形も範囲外である部分は，ブロックＡ'，または，ブロックＢ'の部分として，移動されなければならないが，分割しないままで，正方形Ａの内部に（従って，正方形Ｂの内部にも）移動できないことは，明らかである。従って，その中の左下角を占める部分と，その他の部分に，二分して，移動しなければならない。左下角を占める部分をＰ1とし，ここでは，ブロックＰ1として，最初に，移動することにする。残りの部分をＰ２とし，ブロックＰ2として，次に，移動することにする。

原則24：「正方形Ａ，Ｂ隣角」の場合，部分Ｐ１の下辺と，長方形Ｑの短辺が，同じ長さの場合は，正方形Ｇ，正方形Ａ，正方形Ｂの辺の長さの比は，５：４：３となる。

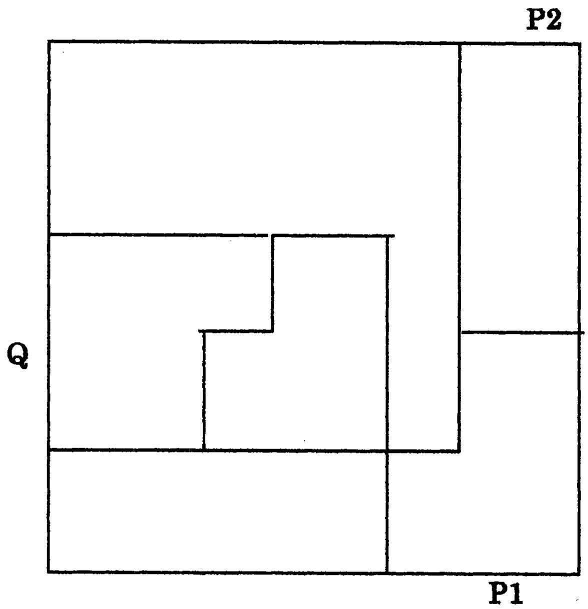
［証明］

次図の正方形Ｂを右に移動して，右図のようにしてみると，原則８で述べた状態と，長さの関係で，まったく一致している。従って，前述のように，長方形Ｐ１と（同じ形の）長方形Ｐ2の合わせた面積は，正方形Ｑの面積と等しい。従って，部分Ｐ１の下辺の長さを２とすると，各正方形の辺の長さは，正方形Ｇは５，正方形Ａは４，正方形Ｂは３，となる。



原則25：「正方形Ａ，Ｂ隣角」の場合，部分Ｐ１の下辺が，長方形Ｑの短辺より短いことはない。

［証明］



１）（部分Ｐ1をふくむ）ブロックＰ１が，正方形Ｑの外部に移動する場合：

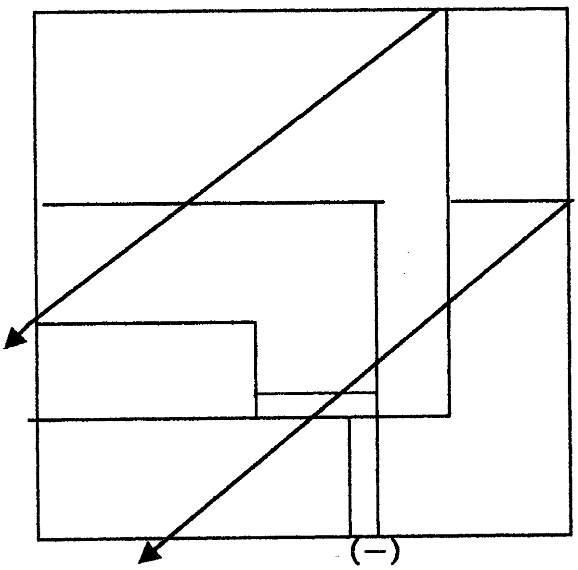
正方形Ｑの幅は，縦，横とも，ここでは，正方形Ｑの外部に比べて，広い。原則９により，この場合は，幅の広い正方形Ｑと，同じ形状のものを，幅の狭い正方形Ｑ外部より，ブロックＰ2の部分として，移動して来なければならないが，これが出来ないことは，明らかである。

２）（部分Ｐ1を含む）ブロックＰ1（の全部，または，一部が）が，正方形Ｑの内部に移動する場合：

上の図に示すように，部分Ｐ1の移動で，正方形Ｑの右，上下の２角を埋める場合は，残りの正方形Ｑの部分は，なお，２辺が，部分Ｐ1の下辺より，共に，長

く，１）と同様に，ブロックＰ2の移動が出来ないことは，明らかである。この場合，正方形Ｑの上辺の幅を狭めるために，ブロックＰ1に，部分Ｐ1に隣接する部分を含めて移動すると，今度は，その部分が，「マイナス部分」となり，ブロックＰ2の移動で，これらの，離れた，複数の「マイナス部分」を，直接または間接移動で，埋めることが出来ないことは，明らかである。

ブロックＰ1の移動で，正方形Ｑの，左の，上下２角を埋める場合も，同様である。



上の図に示すように，部分Ｐ1の移動で，正方形Ｑの，上の左右２角を埋める場合は，原則17，19，により，部分Ｐ2の「間接移動」も，また，直接移動も出来ないことは，明らかである。ブロックＰ1に，隣接部分を含んで移動しても，ブロックＰ2の移動で，複数の「マイナス部分」を，直接または間接移動で，埋めることが出来ないことは，明らかである。

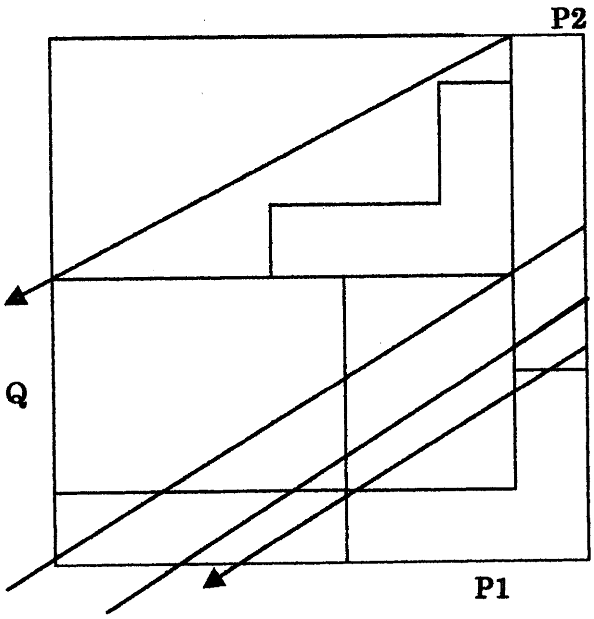
ブロックＰ1の移動で，正方形Ｑの，下の左右２角を埋める場合も，同様に，部分Ｐ2の「間接移動」も，また，直接移動も出来ないことは，明らかである。

以上の１）と２）とによって，部分Ｐ１の下辺が，長方形Ｑの短辺よりが，短いことはないが証明された。

原則26：「正方形Ａ，Ｂ隣角」の場合，部分Ｐ１の下辺が，長方形Ｑの短辺より長いことはない。

［証明］

１）ブロックＰ１が，正方形Ｑの外部に，移動される場合：

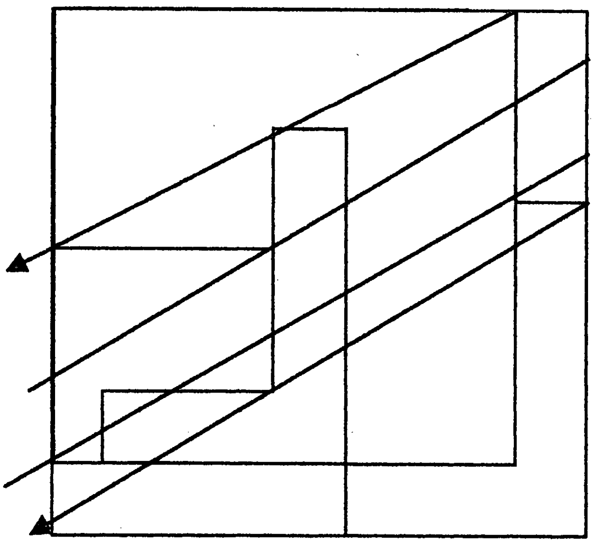


上の図のように，部分Ｐ1が，正方形Ｑの外部に移動される場合は，部分Ｐ2の直接移動も，原則19より，回転移動による「間接移動」も，出来ないことは，明らかである。また，原則17，20，により，平行移動による「間接移動」も出来ないことも，明らかである。原則17と19の両条件を満たして，部分Ｐ1は，正方形Ｑの右部に移動することが出来なく，平行移動の各線上で，「プラス部分」と「マイナス部分」の総和がゼロとなることが出来ない。

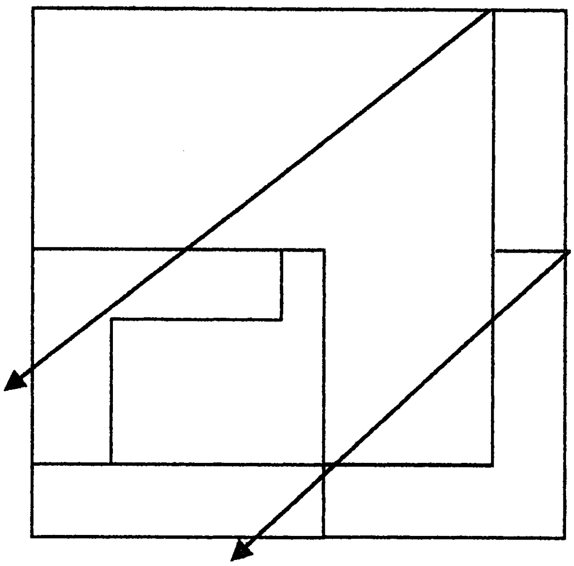
ブロックＰ1が，部分Ｐ1に隣接する部分を含む場合は，移動後，その部分が「マイナス部分」となり，部分Ｐ2の移動が出来ないことは明らかである。

２）ブロックＰ1が，（一部，または，全部が）正方形Ｑの内部に移動される場合：

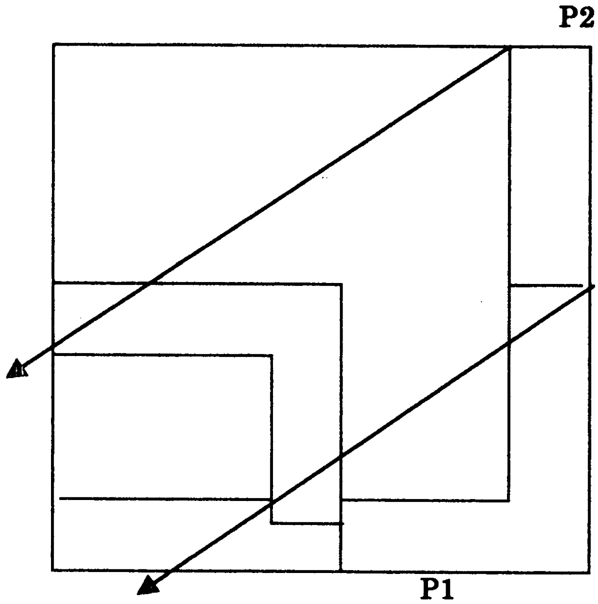
次の図のように，部分Ｐ1が，正方形Ｑの，右２角を占める場合は，原則19により，平行移動による，部分Ｐ2の「間接移動」は出来ない。平行移動の各線上で，「プラス部分」と「マイナス部分」の総和がゼロとなることが出来ないからである。直接移動も，原則20により，回転移動による「間接移動」も出来ないことも明らかである。



下の図に示すように，部分Ｐ１が，正方形Ｑの左２角を占める場合も，同様に，原則19，原則20により，部分Ｐ2の，直接移動も，「間接移動」も，出来ないことは明らかである。



次の図のように，部分Ｐ1が，正方形Ｑの上２角を占める場合は，部分Ｐ1の一部が，正方形Ｑの外に出る。ブロックＰ1の移動後，この部分は，「マイナス部分」となり，部分Ｐ2の，直接移動も，「間接移動」も，出来ないことは明らかである。また，正方形Ｑの下2角を占める場合も同様である。
部分Ｐ1が，正方形Ｑの１角だけしか占めない場合は，部分Ｐ２の移動が出来ないことは明らかである。



これらの場合を含めて，（上の図のように，）部分Ｐ1の一部が，正方形Ｑの外部も占めるときは，その部分が，移動後「マイナス部分」となるので，部分Ｐ2の移動が出来なくなるのは，明らかである。

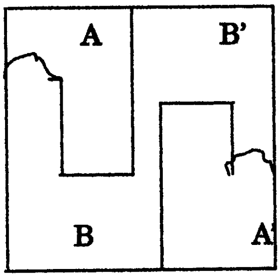
また，ブロックＰ1が，部分Ｐ1に隣接する部分を含む場合も，その部分が，移動後「マイナス部分」となるので，部分Ｐ2の移動が出来なくなるのは，明らかである。

以上の１）２）によって，「正方形Ａ，Ｂ隣角」の場合，部分Ｐ２の下辺が，長方形Ｑの短辺より長いことはないことが，証明された。

以上の，原則24，25，26，により，正方形Ｇの隣角を，正方形ＡとＢのブロックの各１つが，占める場合（「正方形Ａ，Ｂ隣角」の場合）は，「正方形４分割パズル」の解答は，部分Ｐ１の下辺が，長方形Ｑの短辺と同じ長さの場合にだけ，つまり，正方形Ｇ，正方形Ａ，正方形Ｂの，辺の比が，５：４：３　の場合にだけ，成立することが証明された。

Ⅳ．正方形Ｇの角を，正方形ＡとＢのブロックの各１つで占められない場合（「正方形Ａ，Ｂ非対角非隣角」の場合）

ブロックＡ'とＢ'を移動した後，正方形ＡとＢの総ての部分を，正方形Ｇの中に入れる方法がなく，一部が，正方形Ｇの外に出る場合である。



ここでは，移動後，正方形Ｇの外部に出るものを，正方形Ａとする。原則５で述べたように，移動前の，ブロックＡ（上の図では，左上）と，Ａ'（右下）は，上図のような形をとり，正方形Ｇの対角を占める。正方形Ｇを４つのブロックに分けるためには，原則５で述べたことから，隣り合う角を占めることは，出来ないことは明らかである。

ブロックＢ（左下）と，Ｂ'（右上）は，正方形Ｂを合成できる場合は，一方（Ｂ'）を移動して，正方形Ｇの内部に，正方形Ｂを合成出来ることは，原則５で述べたように，それらの形から，明らかである。

原則27「正方形Ａ，Ｂ非対角非隣角」の場合，正方形Ｇの角を占めることの出来ない正方形の，２つのブロックの輪郭は，総て，直角をなす直線より成る。

［証明］

上図で，非直線で表した部分は，合成するとき，ブロックＡとＡ'の接合する部分である。ブロックＢとＢ'を合成するためには，この部分は，正方形Ｇの辺に直角な線でなければならない。そうでなければ，この部分で，ブロックＢとＢ'を接合せざるを得ず，これは，正方形Ｂとならないことは，明らかである。

原則28：「正方形Ａ，Ｂ非対角非隣角」の場合，ブロックＢとＢ'が，合成して，正方形Ｂとなるためには，移動前のブロックＡとＡ'とが，隣接していなければならない。

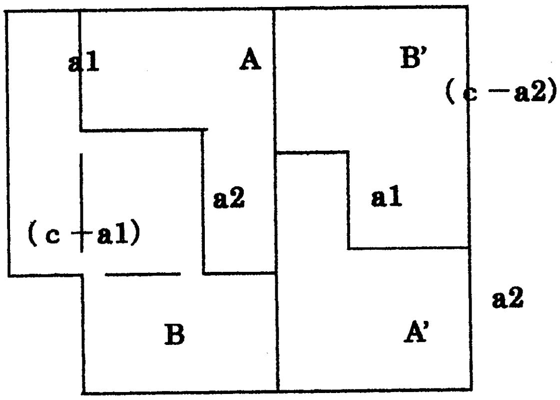
［証明］

ブロックＢ'の正方形Ｇの角を占める部分は，移動して，正方形Ｂの（角ではなく）辺にある点を占めることが出来ないことは，ブロックの形状からして，明らかである。また，正方形Ｂで，正方形Ｇの角を占めるものの，隣角となることも出来ないことも，明らかである。また，対角となるためには，上図のように，移動前のブロックＢとＢ'とが，正方形Ｇの対辺を含んで，接続している形状では，不可能であることは，明らかである。

以上のことより，ブロックＢとＢ'が，合成して，正方形Ｂとなるためには，次の図のように，移動前のブロックＡとＡ'とが，隣接していなければならない。

原則29：「正方形Ａ，Ｂ非対角非隣角」の場合，正方形４分割で，２つの正方形を合成することは出来ない。

［証明］



ここにおいて，ブロックＢの左下の角と，ブロックＢ'の右上の角が，移動後，正方形Ｂの対角となるためには，ブロックＢの左辺（上図で，　ｃ－ａ1，　ここで，ｃは，正方形Ｇの一辺の長さ）と，ブロックＢ'の右辺（ｃ－　ａ2)を，正方形Ｂの対辺としなければいけない。

故に，　ａ1 ＝ ａ2　（＝　ａ　と置く）

従って，正方形Ａの一辺の長さは2ａ　となる。また，ブロックＢ'　の左側の辺と，ブロックＢの接続部分の長さａ2　（＝　ａ　）は，等しくなければならない。

故に，　ｃ ＝ ａ ＋ ａ1 ＋ ａ2 ＝ 3ａ

（上図の中央縦線の長さで見る。）

従って，正方形Ｂの辺の長さは，（ ｃ － ａ1 ＝ ｃ － ａ2 ＝ ）2ａ　となり，正方形Ａの長さと同じということになる。

このことは，正方形Ａの面積（ 2ａ　の平方）と，正方形Ｂの面積（ 2ａ　の平方）を加えたものが，正方形Ｇの面積（ 3ａ　の平方）になることに，矛盾を生じる。

よって，ＩＶの場合（「正方形Ａ，Ｂ非対角非隣角」の場合）は，正方形Ｇの４つのブロックから，正方形Ａと，正方形Ｂを合成することは出来ないことが，証明された。

以上のＩ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，より，「正方形４分割パズル」の解答は，問題に例示されたもの（正方形の角を切る方法）の他には，初めの正方形と，それを４分割して合成した２つの正方形の，各１辺の比が，５：４：３　になる場合の他にはないことが，証明された。

Puzzle "Division of a Square into 4 Pieces"

Proof that there is only one answer except in cases of 5 : 4 : 3 ratio in side length of the 3 squares

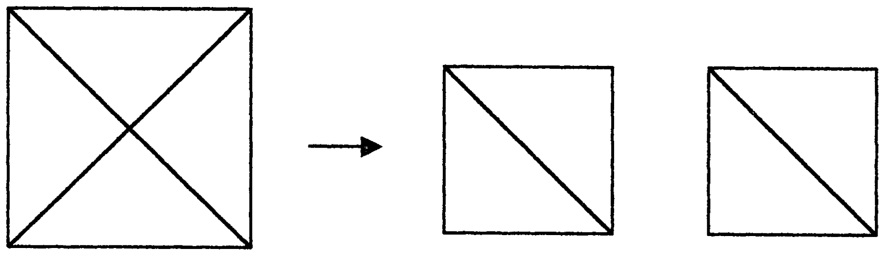
Shinji Kinoshita　　Northern Regions Research Center for Human Service Studies

Abstract

Puzzle "Division of a Square into 4 Pieces" is the following puzzle produced by us. In this study, it was proven that there is only one answer to this puzzle as illustrated below except in cases of 5 : 4 : 3 ratio in side length of the original square and two divided squares.

Question :

Divide a square into 4 pieces. Put 2 of the 4 pieces together, and compose a small square. Put the other 2 pieces together, and compose another small square.



An example is shown in the above. It is not necessary for the 2 smaller squares to be the same in size. Pieces should not be turned inside out. Symmetrical figures are regarded as those of the same kind.

Keywords : recreation, welfare, mathematical puzzle